Teoremas fundamentales

Linealidad

Cualquiera de los métodos de análisis de los sistemas lineales permite expresar las incógnitas como combinación de las fuentes de excitación. Por ejemplo, si se analiza por nudos se tiene:

$$Y_n \cdot \hat{u}_n = \hat{\imath}_g$$

Por consiguiente, se puede determinar $\hat{u}_n$ de la forma:

$$\hat{u}_n = {Y_n}^{-1} \cdot \hat{\imath}_g$$

O lo que es lo mismo:

$$\hat{u}_n = Z_n \cdot \hat{\imath}_g$$

Para un nudo "k", su tensión resulta:

$$U_k = Z_{n_{k_1}} \cdot I_{g_{n_1}} + \cdots + Z_{n_{k_{n-1}}} \cdot I_{g_{n-1}}$$

Si se tiene solamente una fuente de intensidad 1_{gs} entre dos nudos "n_p" (entrante) y "n_q" (saliente), resulta:

$$U_k = 0 + \cdots + Z_{n_{k_p}} \cdot I_{g_s} + \cdots - Z_{n_{k_s}} \cdot I_{g_s} + 0 + \cdots$$

$$U_k = \left(Z_{n_{k_p}} - Z_{n_{k_q}}\right) \cdot I_{g_s} = Z'_{n_{k_s}} \cdot I_{g_s}$$

El término $Z'_{n_{k_s}} \cdot I_{g_s}$ expresa la contribución de la fuente de intensidad “s” a la tensión del nudo “n_k”.

Si se tienen "t" fuentes de intensidad, la tensión en el nudo “k” resulta ser:

$$U_k = Z'_{n_{k_1}} \cdot I_{g_1} + \cdots + Z'_{n_{k_t}} \cdot I_{g_t}$$

Si se tuviesen fuentes de tensión y fuentes de intensidad, se pasarían las fuentes de tensión a fuentes de intensidad. En general la tensión en un nudo es la combinación lineal de todas las fuentes de excitación.

De la misma forma que se ha analizado por nudos se puede analizar por mallas con fuentes de tensión:

$$Z_m \cdot \hat{\imath}_m = \hat{e}_g$$

Sustituyendo $\hat{\imath}_m$ se tiene:

$$\hat{\imath}_m = {Z_m}^{-1} \cdot \hat{e}_g$$

O lo que es lo mismo:

$$\hat{\imath}_m = Y_m \cdot \hat{e}_g$$

Para una malla "k", su intensidad resulta:

$$I_{m_k} = Y_{m_{k_1}} \cdot E_{g_{m_1}} + \cdots + Y_{m_{k_{(r-(n-1))}}} \cdot E_{g_{m_{(r-(n-1))}}}$$

Si se tiene solamente una fuente de tensión E_{g_s} común a dos mallas "m_p" (en la que su intensidad de malla es saliente de +) y "m_q" (en la que su intensidad de malla es entrante por +), resulta:

$$I_{m_k} = 0 + \cdots + Y_{m_{k_p}} \cdot E_{g_s} + \cdots - Y_{m_{k_q}} \cdot E_{g_s} + 0 + \cdots$$

$$I_{m_k} = \left(Y_{m_{k_p}} - Y_{m_{k_q}}\right) \cdot E_{g_s} = Y'_{m_{k_s}} \cdot E_{g_s}$$

El termino $Y'_{m_{k_s}} \cdot E_{g_s}$ expresa la contribución de la fuente de tensión “s” a la intensidad de la malla “m_k”.

Si se tienen "t" fuentes de tensión, la intensidad en la malla “k” resulta ser:

$$I_{m_k} = Y'_{m_{k_1}} \cdot E_{g_1} + \cdots + Y'_{m_{k_t}} \cdot E_{g_t}$$

Si se tuviesen fuentes de tensión y fuentes de intensidad, se pasarían las fuentes de intensidad a fuentes de tensión. En general la intensidad en una malla es la combinación lineal de todas las fuentes de excitación.

Una vez obtenidas las tensiones de los nudos o las intensidades de las mallas, se podrían determinar el resto de las variables del circuito, con lo que cualquier variable de este es función de las excitaciones.

Las propiedades que cumplen los circuitos lineales son:

- La respuesta de un circuito lineal a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas actuando cada una de ellas por separado (TEOREMA DE SUPERPOSICIÓN):

Esto es evidente ya que según se ha visto más arriba:

$$U_k = Z'_{n_{k_1}} \cdot I_{g_1} + \cdots + Z'_{n_{k_t}} \cdot I_{g_t}$$

$$I_{m_k} = Y'_{m_{k_1}} \cdot E_{g_1} + \cdots + Y'_{m_{k_t}} \cdot E_{g_t}$$

- Si todas las excitaciones se multiplican por una constante, la respuesta queda multiplicada por esa constante. Esto es evidente, según se puede comprobar:

$$U'_k = Z'_{n_{k_1}} \cdot a \cdot I_{g_1} + \cdots + Z'_{n_{k_t}} \cdot a \cdot I_{g_t} = \left(Z'_{n_{k_1}} \cdot I_{g_1} + \cdots + Z'_{n_{k_t}} \cdot a \cdot I_{g_t}\right) \cdot a = a \cdot U_k$$

$$I'_{m_k} = Y'_{m_{k_1}} \cdot a \cdot E_{g_1} + \cdots + Y'_{m_{k_t}} \cdot a \cdot E_{g_t} = \left(Y'_{m_{k_1}} \cdot E_{g_1} + \cdots + Y'_{m_{k_t}} \cdot E_{g_t}\right) \cdot a = I_{m_k} \cdot a$$

Superposición

Según ya se dijo el teorema de superposición dice que la respuesta de un circuito lineal a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas actuando cada una de ellas por separado. Las fuentes de tensión independientes que no se consideran se deben de poner a cortocircuito y las fuentes de intensidad independientes que no se consideran se deben de poner a circuito abierto.

Sustitución

Una resistencia (o conductancia) se puede sustituir por una fuente de tensión dependiente de intensidad o por fuente de intensidad dependiente de tensión, ya que no alteran en nada las leyes de Kirchoff, Figura 1 y Figura 2.

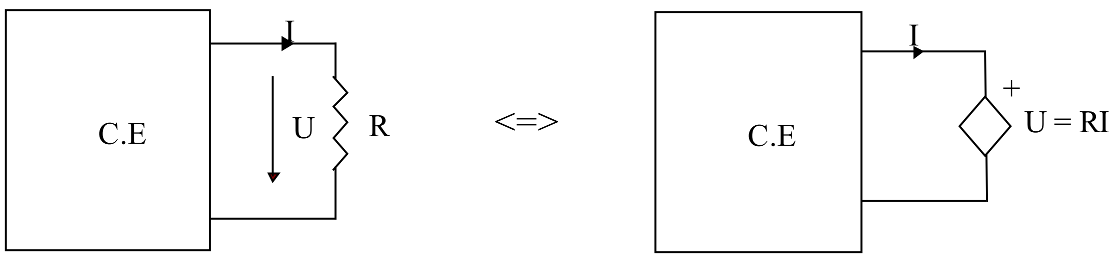

Figura 1. Circuito equivalente con una fuente de tensión.

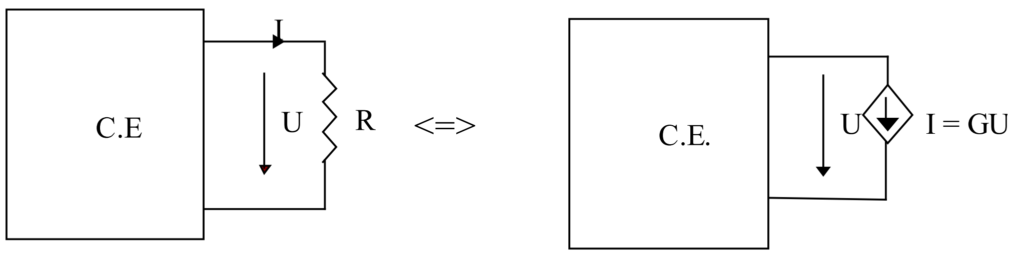

Figura 2. Circuito equivalente con una fuente de intensidad.

En un circuito abierto se puede sustituir la tensión por una fuente de tensión de valor U_0, el circuito ha aumentado una malla, pero su intensidad no es incógnita ya que vale 0, Figura 3.

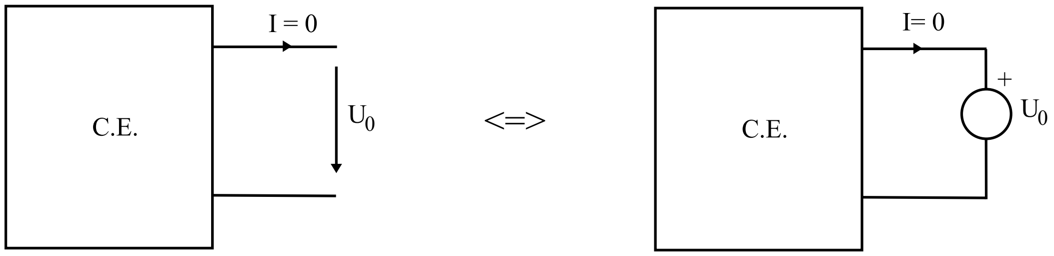

Figura 3. Representación de la tensión de circuito abierto.

Análogamente en un cortocircuito se puede sustituir la intensidad por una fuente de intensidad de valor I_0, el circuito ha aumentado en un nudo, pero la tensión de este, si se considera como nudo referencia el otro extremo, no es incógnita ya que vale 0, Figura 4.

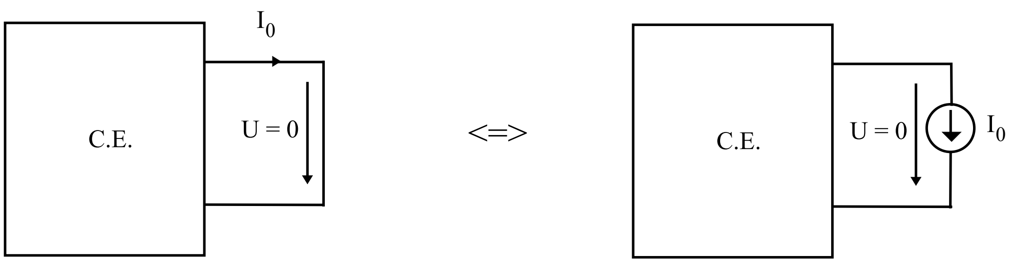

Figura 4. Determinación de la corriente de cortocircuito.

Ecuación de un dipolo

En general para cualquier elemento existe una relación entre su tensión y su intensidad:

$$u = f(i)$$

O, de manera equivalente:

$$i = g(u)$$

Estas variables pueden ser determinadas en cuanto se establezca otra segunda ecuación que les relacione, lo que se logra en cuanto este elemento se conecte a un circuito más o menos complejo con dos terminales (dipolo), Figura 5.

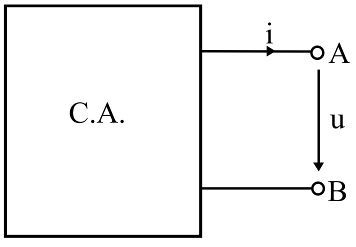

Figura 5. Representación de un dipolo.

Se considera un circuito activo C.A. porque es el caso más general ya que un circuito pasivo C.P. es un caso particular en el que no hay fuentes de excitación independientes.

Se trata ahora de ver que existe una relación entre su tensión y su intensidad, si se materializa la tensión mediante una fuente de tensión, Figura 6.

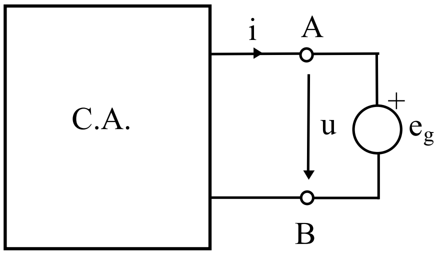

Figura 6. Determinación de la relación tensión e intensidad en un dipolo.

Mediante cualquier método de análisis, mallas, por ejemplo, se obtiene la intensidad en función de la tensión (o la tensión en función de la intensidad), también se puede mediante el teorema de superposición, Figura 7.

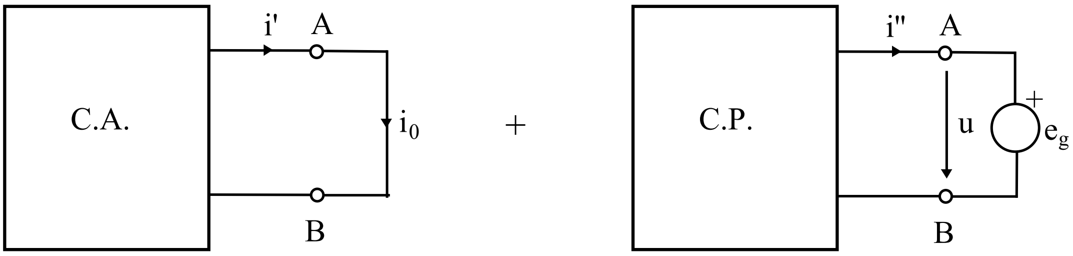

Figura 7. Determinación de las variables eléctricas entre dos puntos en un dipolo.

Donde:

$$i = i' + i''$$

La primera de las intensidades no depende de u y es la corriente de cortocircuito entre A y B representándose por i_0, la segunda de las intensidades es debida a la tensión u y se representa por $-Y_e \cdot u$, entonces:

$$i = i_0 - Y_e \cdot u$$

- Para determinar i_0 se cortocircuitan los terminales A y B con el circuito activo C.A.
- Para determinar Y_e, que se denomina admitancia de entrada del dipolo, se coloca una fuente de tensión en los terminales A y B con el circuito pasivo C.P. (se cortocircuitan las ramas donde están las fuentes de tensión independientes y se ponen a circuito abierto las ramas donde están las fuentes de intensidad

independientes) y se determina la relación entre la intensidad que circula por la fuente de tensión y el valor de dicha fuente. Y_e es esta relación cambiada de signo.

Análogamente, si se materializa la intensidad mediante una fuente de intensidad, Figura 8.

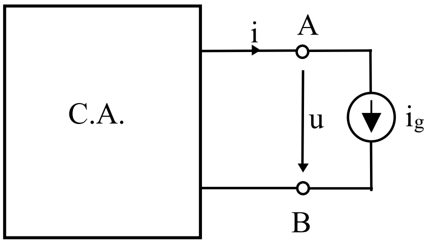

Figura 8. Determinación de un dipolo a partir de una fuente de intensidad.

Mediante cualquier método de análisis, nudos, por ejemplo, se obtiene la tensión en función de la intensidad (o la intensidad en función de la tensión), también se puede mediante el teorema de superposición, Figura 9.

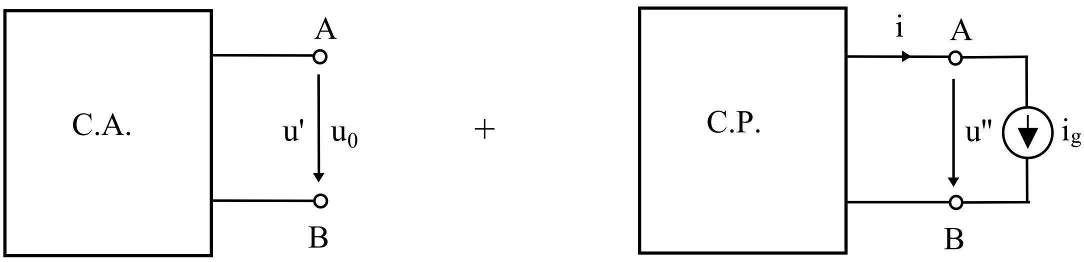

Figura 9. Determinación de las variables de un circuito mediante el teorema de superposición.

Donde:

$$u = u' + u''$$

La primera de las tensiones no depende de i y es la tensión a de circuito abierto entre A y B representándose por u_0, la segunda de las tensiones es debida a la intensidad i y se representa por $-Z_e \cdot i$, entonces:

$$u = u_0 - Z_e \cdot i$$

- Para determinar u_0 se ponen a circuito abierto los terminales A y B con el circuito activo C.A.
- Para determinar Z_e, que se denomina impedancia de entrada del dipolo, se coloca una fuente de intensidad en los terminales A y B con el circuito pasivo C.P. (se cortocircuitan las ramas donde están las fuentes de tensión independientes y se ponen a circuito abierto las ramas donde están las fuentes de intensidad independientes) y se determina la relación entre la tensión en la fuente de intensidad y el valor de dicha fuente. Z_e es esta relación cambiada de signo.

Thévenin y Norton

Cuando se tiene un elemento (o un circuito más complejo) conectado a un circuito activo C.A. con dos terminales (dipolo), se pueden reducir el análisis sustituyendo el C.A. por un esquema más simple equivalente (es decir que produzca los mismos efectos externos).

En el caso de **corriente continua**, Figura 10.

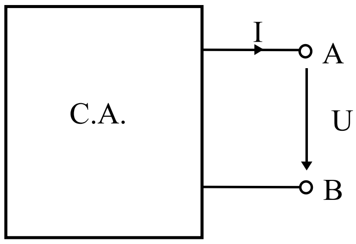

Figura 10. Determinación de la tensión a circuito abierto de un dipolo.

A partir de las ecuaciones anteriores resulta:

$$U = U_0 - R_{eq} \cdot I$$

De esta manera se tiene lo representado en la Figura 11.

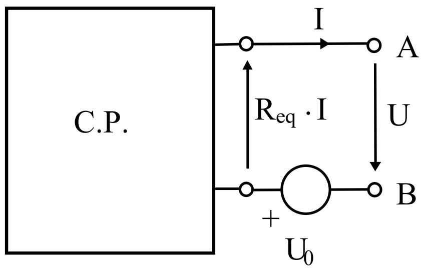

Figura 11. Determinación de la tensión a circuito abierto a partir de una fuente de tensión.

Siendo:

$$I = I_0 - G_{eq} \cdot U$$

Se tiene lo representado en la Figura 12.

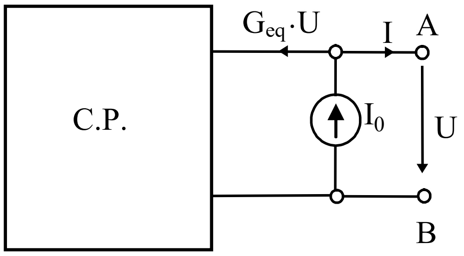

Figura 12. Determinación de la tensión a circuito abierto a partir de una fuente de intensidad.

Se suele sustituir el C.P. por su resistencia (impedancia) o conductancia (admitancia) de entrada, resultando para el primer circuito el equivalente Thévenin, Figura 13.

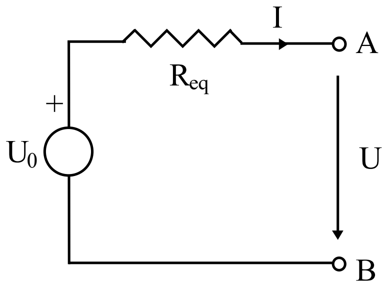

Figura 13. Equivalente Thévenin.

Para el segundo circuito resulta el equivalente Norton, Figura 14.

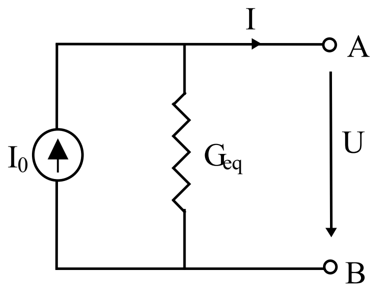

Figura 14. Equivalente Norton.

Evidentemente al ser el mismo circuito:

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{eq}} = G_{eq} \cdot U_0$$

$$U_0 = R_{eq} \cdot I_0 = \frac{I_0}{G_{eq}}$$

$$R_{eq} = \frac{U_0}{I_0}$$